Egzistuoja ryšys tarp aibių operacijų ir loginių operacijų. Aibių operacijos ∪, ∩ ir ¯ (papildinys)

atitinka logines operacijas ∨, ∧ ir ￢, aibės U (universali aibė) ir ∅ (tuščia aibė) atitinka logines

konstantas t ir k. Tada aibių operacijos irgi tenkina dėsnius, kuriuos jūs jau žinote iš matematinės

logikos: visiems universalios aibės U poaibiams A, B ir C galioja

(1) (a) A ∪ B = B ∪ A,

(b) A ∩ B = B ∩ A (*komutatyvumas*),

(2) (a) A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C,

(b) A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C (*asociatyvumas*),

(3) (a) A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C),

(b) A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) (*distributyvumas*),

(4) (a) A ∪ ∅ = A,

14

(b) A ∩ ∅ = ∅,

(5) A = A,

(6) (a) A ∪ A = A,

(b) A ∩ A = A (*idempotentumas*),

(7) (a) A ∪ B = A ∩ B,

(b) A ∩ B = A ∪ B (*De Morgano dėsniai*).

Aibių visumą, kurioje galioja dėsniai (1)–(7), vadina *aibių algebra*.

**Funkcijos**

*Atitiktimi* tarp netuščių aibių A ir B vadiname bet kokį netuščią poaibį F ⊆ A × B.

**2.1 pavyzdys.** Tegu A = {a, b, c}, B = {0, 1, 2}. Tada F = {(a, 1), (b, 0), (c, 1)} ir F′ = {(a, 0), (a, 1),

(a, 2), (c, 0)} yra atitiktys. \_

Atitiktis F — *funkcinė*, jei kiekvienam a ∈ A egzistuoja vienintelis vektorius (a, b) ∈ F.

**2.2 pavyzdys.** Paskutinio pavyzdžio atitiktis F yra funkcinė, nes aibėje F yra vienintelis vekto-

rius, kurio pirmoji koordinatė yra a, taip pat vienintelis vektorius su b, ir taip pat su c. Atitiktis

F′ nėra funkcinė, nes yra trys vektoriai su a, ir jokio su b. \_

Jei F — funkcinė atitiktis, tai sakome, kad F apibrėžia *funkciją* (*atvaizdį*) f :A → B, o vektoriaus

(a, b) ∈ F koordinatę b žymime f(a) ir vadiname elemento a *vaizdu*.

**2.3 pavyzdys.** Kadangi 2.1 pavyzdžio atitiktis yra funkcinė, tai ji apibrėžia funkciją f :A → B

tokią, kad f(a) = 1, f(b) = 0 ir f(c) = 1. Elemento a vaizdas yra 1, elemento b — 0, ir elemento c

— 1. Grafiškai galėtume pavaizduoti taip:

0

1

a

c

A f B

b

2

\_

Taigi funkcija f :A → B yra atitiktis tarp A ir B, priskirianti kiekvienam aibės A elementui

kokį nors aibės B elementą. Aibė A vadinama funkcijos f *apibrėžimo sritimi*, o aibės B poaibis

f(A) = {b ∈ B: ∃a ∈ A toks, kad b = f(a)} vadinamas funkcijos f *reikšmių sritimi* (ženklas ‘∃’

reiškia “egzistuoja”, taip pat vartosime ženklą ‘∀’, kuris reiškia “kiekvienam”). Beje, aibę f(A)

galima apibrėžti, vartojant trumpesnį užrašą: f(A) = {f(a): a ∈ A} — tai yra aibė reikšmių f(a),

# Injekcija

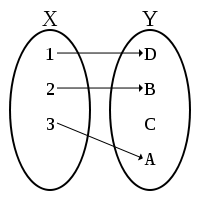
**Injekcija** [matematikoje](http://lt.wikipedia.org/wiki/Matematika) reiškia [atvaizdį](http://lt.wikipedia.org/wiki/Atvaizdis) (atvaizdavimo būdą) arba [funkciją](http://lt.wikipedia.org/wiki/Funkcija_%28matematika%29) *f*, kuri skirtingiems [aibės](http://lt.wikipedia.org/wiki/Aib%C4%97) X elementams priskiria skirtingus elementus iš aibės Y (žinoma, gali būti atvejai, kai viena aibė yra kitos poaibis).

Kitaip tariant, jei *a*, *b* yra aibės X elementai, o *f*(*a*), *f*(*b*) - aibės Y elementai, *f* yra injekcija, jei iš *f*(*a*) = *f*(*b*) seka *a* = *b* (arba iš *a* ≠ *b* seka *f*(*a*) ≠ *f*(*b*)), su visais *a*, *b* aibėje X.

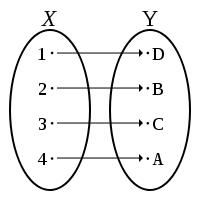
Nors injekcijos yra vienareikšmiškai apverčiamos funkcijos, tačiau būtina atkreipti dėmesį, kad injekcijos sąlyga nereikalauja, kad kiekvienam aibės Y elementui būtų priskiriamas aibės X elementas.

## Pavyzdžiai

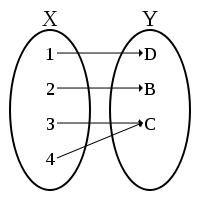
* Funkcija, kiekvienam [natūriniam skaičiui](http://lt.wikipedia.org/wiki/Nat%C5%ABralieji_skai%C4%8Diai) *n* priskirianti skaičių *n*² yra injekcija.
* Funkcija, kiekvienam [sveikajam skaičiui](http://lt.wikipedia.org/wiki/Sveikieji_skai%C4%8Diai) *z* priskirianti skaičių *z*² nėra injekcija (dėl to, kad, pavyzdžiui, 2 ir -2 priskiriamas tas pat skaičius 4).

[](http://lt.wikipedia.org/wiki/Vaizdas:Injection.svg)

Injekcija.

[](http://lt.wikipedia.org/wiki/Vaizdas:Bijection.svg)

Kita injekcijos funkcija.

[](http://lt.wikipedia.org/wiki/Vaizdas:Surjection.svg)

Neinjektyvi funkcija.

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------

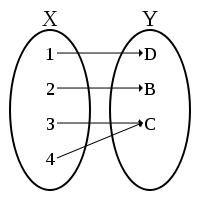
# Siurjekcija

**Siurjekcija** (anksčiau plačiai naudotas terminas **surjekcija**) [matematikoje](http://lt.wikipedia.org/wiki/Matematika) reiškia [atvaizdį](http://lt.wikipedia.org/wiki/Atvaizdis) (atvaizdavimo būdą) arba [funkciją](http://lt.wikipedia.org/wiki/Funkcija_%28matematika%29) f, kuri kiekvienam Y [aibės](http://lt.wikipedia.org/wiki/Aib%C4%97) elementui priskiria bent vieną aibės X elementą taip, kad *f*(*x*) = *y*.

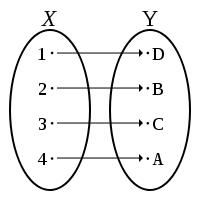
Reikia atkreipti dėmesį, kad siurjekcija nereikalauja vienareikšmiškumo (skirtingiems x gali būti priskirtas tas pat vienas y elementas, taip pat gali likti x elementų, kuriems nepriskiriamas joks y).

## Pavyzdžiai

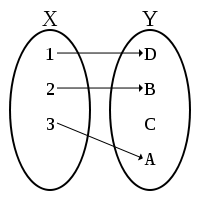
* Funkcija, teigiamųjų [realiųjų skaičių](http://lt.wikipedia.org/wiki/Realieji_skai%C4%8Diai) aibėje, kiekvienam teigiamam *r* priskirianti realųjį skaičių *r*² yra siurjekcija.
* Funkcija, atvaizduojanti realiųjų skaičių aibę į visų realiųjų skaičių aibę *f*: **R** → **R** apibrėžtą taip, kad *f*(*x*) = *x*² nėra siurjekcija, kadangi nėra tokio realiojo skaičiaus *x*, kuriam *x*² = −1.

[](http://lt.wikipedia.org/wiki/Vaizdas:Surjection.svg)

Siurjekcija.

[](http://lt.wikipedia.org/wiki/Vaizdas:Bijection.svg)

Kita siurjektyvi funkcija.

[](http://lt.wikipedia.org/wiki/Vaizdas:Injection.svg)

Funkcija, netenkinanti siurjektyvumo sąlygos.

# Bijekcija

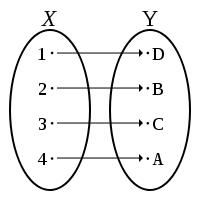
**Bijekcija** [matematikoje](http://lt.wikipedia.org/wiki/Matematika) yra [atvaizdis](http://lt.wikipedia.org/wiki/Atvaizdis) arba [funkcija](http://lt.wikipedia.org/wiki/Funkcija_%28matematika%29) *f* atvaizduojanti [aibę](http://lt.wikipedia.org/wiki/Aib%C4%97) *X* į aibę *Y* taip, kad kiekvieną aibės *Y* elementą *y* atitinka tik vienas *X* aibės elementas *x* ir kiekvieną *x* atitinka tik vienas *y*: *f*(*x*) = *y*.

Kitais žodžiais sakant, funkcija yra bijekcija, jei ji yra [injekcija](http://lt.wikipedia.org/wiki/Injekcija_%28matematika%29) ir [siurjekcija](http://lt.wikipedia.org/wiki/Siurjekcija).

Bijekcija vaidina svarbų vaidmenį matematikoje, pavyzdžiui, apibrėžiant [izomorfizmo](http://lt.wikipedia.org/wiki/Izomorfizmas) ir kitas su ja susijusias sąvokas.

## Pavyzdžiai

* Aibės *X*, atvaizdis į ją pačią apibrėžtas kaip id*X*(*x*) = *x* yra bijekcija.
* Eksponentinė funkcija *g* : **R** \rightarrow**R**, atvaizduojanti [realiųjų skaičių](http://lt.wikipedia.org/wiki/Realieji_skai%C4%8Diai) aibę į visą realiųjų skaičių aibę *g(x)* = [e](http://lt.wikipedia.org/wiki/Skai%C4%8Dius_e)*x* nėra bijekcija: nėra tokio *x* realiųjų skaičių aibėje **R** kad *g*(*x*) = −1, (t. y. *g* [nesurjektyvi](http://lt.wikipedia.org/wiki/Siurjekcija)).
* Funkcija, kiekvienam [sveikajam skaičiui](http://lt.wikipedia.org/wiki/Sveikieji_skai%C4%8Diai) *z* priskirianti skaičiaus absoliutinę vertę skaičių abs(*z*) nėra bijekcija (dėl to, kad, pavyzdžiui, 2 ir -2 priskiriamas tas pat skaičius 2, t. y. - funkcija [neinjektyvi](http://lt.wikipedia.org/wiki/Injekcija)) .

[](http://lt.wikipedia.org/wiki/Vaizdas:Bijection.svg)

Bijekcija.

Bijekciją dar vadina *abipusiškai vienareikšmiu atvaizdavimu* (arba *abipusiškai vienareikšme ati-*

*tiktimi*, *abipusiškai vienareikšmiu atvaizdžiu*), kadangi šiuo atveju ne tik kiekvienam a ∈ A priski-

riamas vienintelis aibės B elementas b, žymimas f(a), bet ir kiekvienam b ∈ B egzistuoja vienintelis

a ∈ A toks, kad f(a) = b. Pažymėję tokį elementą a = g(b), gauname funkciją g :B → A, kuri vadinama *atvirkštine* funkcijai f ir žymima f−1.

**Sąryšiai**

**3.1 apibrėžimas.** n*-*viečiu *(*n*-*nariniu*)* sąryšiu *aibėje* A *vadiname bet kokį poaibį* R ⊆ An*.*

Pavyzdžiui, Pitagoro skaičių trejetai sudaro trivietį sąryšį P = {(x, y, z): x2 +y2 = z2, x, y, z ∈ Z}

sveikųjų skaičių aibėje. Toliau nagrinėsime tik dviviečius (binarinius) sąryšius, kuriuos vadinsime

tiesiog sąryšiais. Pavyzdžiui, kiekvieną funkciją f :A → A atitinka sąryšis {(a, f(a)): a ∈ A} (mes

jį vadinome atitiktimi).

**3.2 pavyzdys.** Funkciją f : {0, 1} → {0, 1}, f(0) = 1, f(1) = 1, atitinka sąryšis R = {(0, 1), (1, 1)}.\_

Jei (a, b) ∈ R, tai sakome, kad a ir b yra *susieti sąryšiu* R ir žymime aRb. Priešingu atveju

žymime ￢(aRb).

**3.3 pavyzdys.** Tegu A = {2, 4, 7}, R = {(2, 4), (2, 7), (4, 7)}. Tada rašome 2R4, 2R7, 4R7,

￢(4R2). \_

Kodėl toks žymėjimas? Daugeliu atvejų tai natūralus žymėjimas. Pavyzdžiui, atkreipkite dė-

mesį, kad šio pavyzdžio sąryšį galėtume pavadinti “mažiau” (nes sąryšiui priklauso tik tos poros

(a, b) ∈ A2, kurioms a < b), todėl natūraliau šį sąryšį būtų žymėti ženklu ’<’, ir tada 2R4, 2R7

bei 4R7 būtų užrašomi 2 < 4, 2 < 7 ir 4 < 7. Dažnai, šnekant apie sąryšius, ir turimi omenyje

tokie “natūralūs” sąryšiai, kaip “daugiau”, “mažiau”, “daugiau arba lygu”, “mažiau arba lygu”,

“lygu” skaičių aibėje, “ekvivalentu” loginių formulių aibėje, “yra poaibis”, “yra tikrinis poaibis”,“lygu” universalios aibės poaibių aibėje ir t.t. Kaip matome, kiekvienu atveju kai kurios objektų

poros yra susietos sąryšiu, o kai kurios ne. Pavyzdžiui, kai sąryšis yra “mažiau” skaičių aibėje,

tai skaičiai 2 ir 3 yra susieti tuo sąryšiu (nes 2 < 3), o 4 ir 3 ne (nes netiesa, kad 4 < 3). Pačiu

bendriausiu atveju sąryšis apibrėžiamas tiesiog išvardijant elementų poras, susietas tuo sąryšiu.

Baigtinėje aibėje A = {a1, a2, . . . , an} apibrėžtą sąryšį R galima nusakyti sąryšio matrica.

**3.4 apibrėžimas.** Sąryšio R matrica *— tai* n × n *matrica* M*, kurios elementas* Mij *, esantis* i*-*

*tosios eilutės ir* j*-tojo stulpelio susikirtime, yra lygus* 1*, jei* ai *ir* aj *yra susieti sąryšiu* R*, ir* 0*, jei*

*nėra:*

Mij =

(

1, *jei* ai Raj ,

0, *priešingu atveju.*

Pavyzdžiui, 3.3 pavyzdžio sąryšio matrica yra

M =

2 4 7

2 0 1 1

4 0 0 1

7 0 0 0

.

Čia mes aiškumo dėlei sunumeravome eilutes ir stulpelius aibės A elementais.

**3.5 apibrėžimas.** *Sąryšį* R *aibėje* A *vadiname* refleksyviu*, jei* ∀a ∈ A (aRa)*, t.y. jei kiekvienas*

*aibės* A *elementas sąryšiu* R *yra susietas su savimi pačiu.*

Pavyzdžiui, 3.3 pavyzdžio sąryšis nėra refleksyvus, nes netiesa, kad 2 < 2 (t.y. pora (2, 2) /∈ R).

Sąryšis yra refleksyvus tada ir tik tada, kai jo matricos pagrindinėje įstrižainėje1 nėra nei vieno

nulio (yra tik vienetai). Tai aiškiai matosi iš to, kad ant sąryšio matricos pagrindinės įstrižainės

esantys elementai atitinka poras (a, a).

**3.6 pavyzdys.** Sąryšis {(2, 2), (4, 4), (7, 7), (4, 2), (2, 7)} aibėje A = {2, 4, 7} yra refleksyvus. Jo

matrica yra

M =

2 4 7

2 1 0 1

4 1 1 0

7 0 0 1

.

Pagrindinėje įstrižainėje yra tik vienetai. \_

**3.7 apibrėžimas.** *Sąryšį* R *aibėje* A *vadiname* antirefleksyviu*, jei neegzistuoja tokio* a ∈ A*, kad*

aRa*.*

Kitaip tariant, sąryšis R yra antirefleksyvus, jei ∀a ∈ A ￢(aRa). Sąryšis yra antirefleksyvus

tada ir tik tada, kai jo matricos pagrindinėje įstrižainėje nėra nei vieno vieneto (yra tik nuliai). 3.3

pavyzdžio sąryšis yra antirefleksyvus, nes ∀a ∈ A (a, a) /∈ R.

Taigi sąryšis gali būti refleksyvus (tada jis nebus antirefleksyvus, jo matricos pagrindinėje įstri-

žainėje bus tik vienetai), antirefleksyvus (tada jis nebus refleksyvus, jo matricos pagrindinėje įstri-

žainėje bus tik nuliai), ir nei toks, nei toks (tada jo matricos pagrindinėje įstrižainėje bus ir vienetų,

ir nulių). Jis negali būti ir refleksyvus, ir antirefleksyvus.

1n × n matricos M pagrindinę įstrižainę sudaro elementai M11, M22,…,Mnn.

-------------------------------------------------------------------------------------------------

[**http://ittrys.files.wordpress.com/2012/01/konspektas2wip.pdf**](http://ittrys.files.wordpress.com/2012/01/konspektas2wip.pdf)

***Saryšiai.*** Matematiniu saryšiu tarp aibes A elementu vadiname bet koki

Dekarto sandaugos A\_A poaibi \_. Sakysime, kad a yra saryšyje su b, jeigu

pora (a; b) 2 \_. Šitai žymesime a \_ b. Saryšiai buna:

a) **refleksyvus**, jei a \_ a visiems a 2 A (visi elementai yra saryšyje su

paciais savim).

b) **simetriški**, jei a \_ b reiškia, kad b \_ a (saryšis abipusis).

c) **antisimetriški**, jei a \_ b ir b \_ a galioja tik tuomet, kai a = b (saryšis

neabipusis).

d) **tranzityvus**, jei a \_ b, b \_ c reiškia, kad a \_ c (saryšis perduodamas).

Refleksyvus, simetriški, tranzityvus saryšiai vadinami **ekvivalentumo** saryšiais.

Antisimetriški ir tranzityvus saryšiai vadinami **tvarkos** saryšiais.

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Relations

In the above section dealing with functions and their properties, we noted the important property that all functions must have, namely that if a function does map a value from its domain to its co-domain, it must map this value to only one value in the co-domain.

Writing in set notation, if *a* is some fixed value:

|{f(x)|x=a}| ∈ {0, 1}

The literal reading of this statement is: the *cardinality* (number of elements) of the set of all values f(x), such that x=a for some fixed value a, is an element of the set {0, 1}. In other words, the number of *outputs* that a function f may have at any fixed *input* a is either zero (in which case it is *undefined* at that input) or one (in which case the output is unique).

However, when we consider the *relation*, we relax this constriction, and so a relation may map one value to more than one other value. In general, a relation is **any** subset of the Cartesian product of its domain and co-domain.

All functions, then, can be considered as relations also.

### Notations

When we have the property that one value is related to another, we call this relation a *binary relation* and we write it as

x R y

where R is the relation.

For arrow diagrams and set notations, remember for relations we do not have the restriction that functions do and we can draw an arrow to represent the mappings, and for a set diagram, we need only write all the ordered pairs that the relation does take: again, by example

f = {(0,0),(1,1),(1,-1),(2,2),(2,-2)}

is a relation and not a function, since both 1 and 2 are mapped to two values, 1 and -1, and 2 and -2 respectively) example let A=2,3,5;B=4,6,9 then A\*B=(2,4),(2,6),(2,9),(3,4),(3,6),(3,9),(5,4),(5,6),(5,9) Define a relation R=(2,4),(2,6),(3,6),(3,9) add funtions and problems to one aonther

### Some simple examples

Let us examine some simple relations.

Say f is defined by

{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(3,1),(2,1),(3,2),(1,3)}

This is a relation (not a function) since we can observe that 1 maps to 2 and 3, for instance.

Less-than, "<", is a relation also. Many numbers can be less than some other fixed number, so it cannot be a function.

### Properties

When we are looking at relations, we can observe some special properties different relations can have.

#### Reflexive

A relation is *reflexive* if, we observe that for all values a:

*a* R *a*

In other words, all values are related to themselves.

The relation of equality, "=" is reflexive. Observe that for, say, all numbers a (the domain is **R**):

*a* = *a*

so "=" is reflexive.

In a reflexive relation, we have arrows for all values in the domain pointing back to themselves:

[Arrow diagram reflexive.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arrow_diagram_reflexive.png)

Note that ≤ is also reflexive (a ≤ a for any a in **R**). On the other hand, the relation < is not (a < a is false for any a in **R**).

#### Symmetric

A relation is *symmetric* if, we observe that for all values a and b:

*a* R *b* implies *b* R *a*

The relation of equality again is symmetric. If *x*=*y*, we can also write that *y*=*x* also.

In a symmetric relation, for each arrow we have also an opposite arrow, i.e. there is either no arrow between *x* and *y*, or an arrow points from *x* to *y* and an arrow back from *y* to *x*:

[Arrow diagram symmetric.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arrow_diagram_symmetric.png)

Neither ≤ nor < is symmetric (2 ≤ 3 and 2 < 3 but not 3 ≤ 2 nor 3 < 2 is true).

#### Transitive

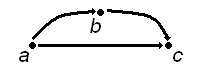
A relation is *transitive* if for all values *a*, *b*, *c*:

*a* R *b* and *b* R *c* implies *a* R *c*

The relation *greater-than* ">" is transitive. If *x* > *y*, and *y* > *z*, then it is true that *x* > *z*. This becomes clearer when we write down what is happening into words. *x* is greater than *y* and *y* is greater than *z*. So *x* is greater than both *y* and *z*.

The relation *is-not-equal* "≠" is not transitive. If *x* ≠ *y* and *y* ≠ *z* then we might have *x* = *z* or *x* ≠ *z* (for example 1 ≠ 2 and 2 ≠ 3 and 1 ≠ 3 but 0 ≠ 1 and 1 ≠ 0 and 0 = 0).

In the arrow diagram, every arrow between two values *a* and *b*, and *b* and *c*, has an arrow going straight from *a* to *c*.

[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arrow_diagram_transitive.png)

#### Antisymmetric

A relation is *antisymmetric* if we observe that for all values *a* and *b*:

*a* R *b* and *b* R *a* implies that *a*=*b*

**Notice that antisymmetric is not the same as "not symmetric."**

Take the relation *greater than equals to*, "≥" If *x* ≥ *y*, and *y* ≥ x, then *y* must be equal to *x*. a relation is anti-symmetric if and only if a∈A, (a,a)∈R